TAKIACADEMY.COM

Exercice n°1: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer les réels a et b sachant que f admet un extremum en 2 de valeur 3

Dans la suite de l'exercice, on prend a = -1 et b = 1

1°/ a) Vérifier que $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 1}$

b) Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

c) Etudier la position relative de C et de D

2°/ Tracer C et D

3°/ Soit la fonction g définie par $\begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} & \text{si } x \leq 2 \text{ et } x \neq 1 \\ \sqrt{x^2 - 4} + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ et C' sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est continue en 2.

c) Etudier la dérivabilité de g en 2 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

d) Justifier la dérivabilité de g sur $]-\infty,2[\setminus\{1\}$ et $]2,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$

e) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} + 3 - x$. Quelle interprétation graphique peut-on déduire pour la courbe C'

f) Construire la courbe C'

Exercice 1 :

1°/ f admet un extremum en 2

alors $f'(2)=0$

et $f(2)=3$.

* $f(2)=3 \Leftrightarrow \dfrac{4+2a+b}{2-1}=3 \Leftrightarrow 2a+b=-1$

* f derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

$f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)\times 1}{(x-1)^2}$ $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$f'(2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(4+a)-(4+2a+b)}{1}=0$

$\Leftrightarrow -a-b=0 \Leftrightarrow a+b=0$

on ainsi $\begin{cases} a+b=0 & (1) \\ 2a+b=-1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-a=1 \end{cases}$

Ainsi $a=-1$ et $b=1$

1) a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

$x + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = f(x).$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{1}{x-1} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

$D : y = x$ est donc une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

alors $D : y = x$ asymptote à

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

alors $D : y = x$ asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$

c) $f(x) - y = f(x) - x = \dfrac{1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	||	$+$
Position	$\mathcal{C}$ en dessous de D	||	$\mathcal{C}$ au dessus de D

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

2/ f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \frac{1}{x-1} = -\infty$$

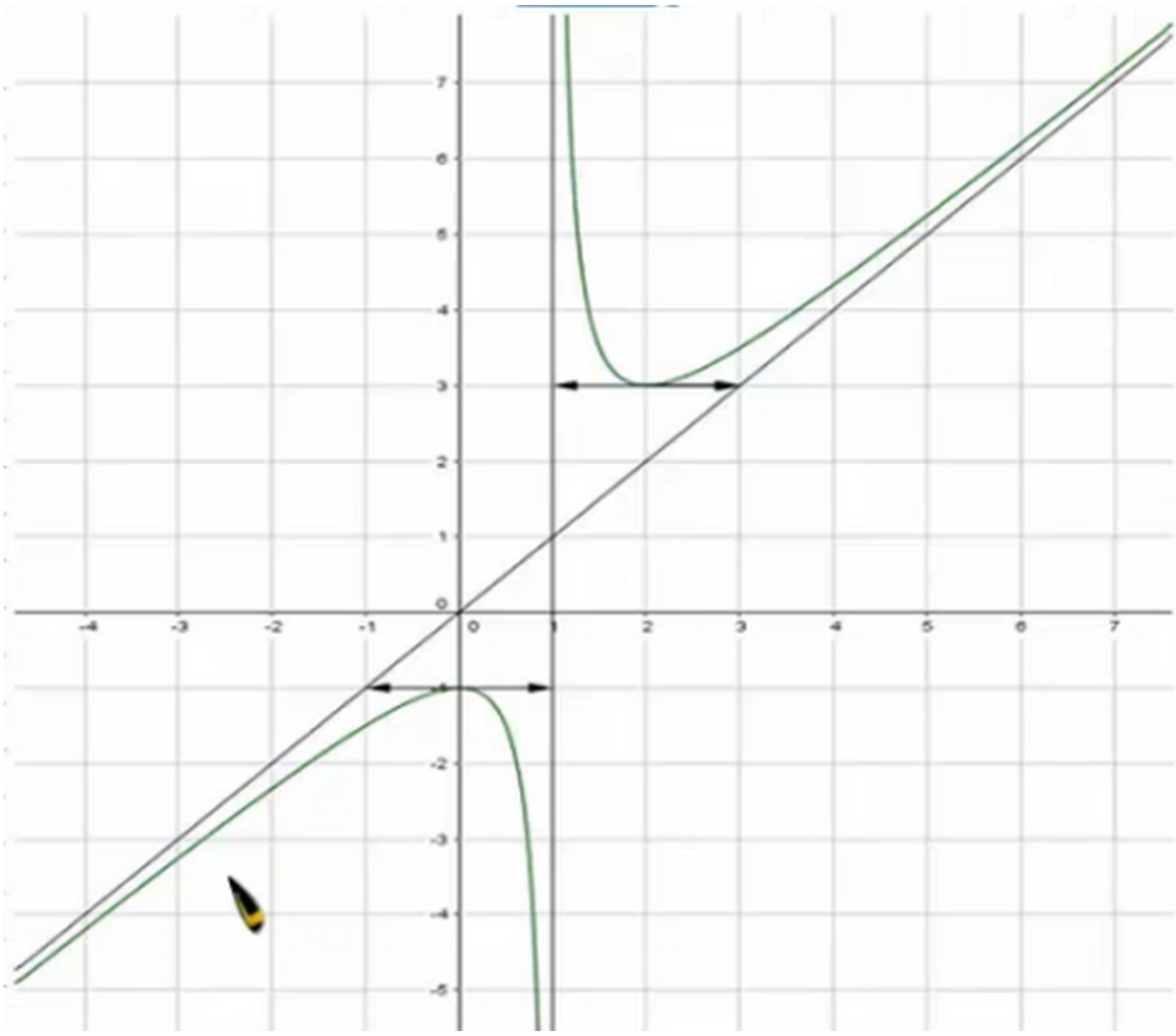
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$x - 1$: $-$ 0 $+$ (1^+)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{0^-}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$y = x$



7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Academy
TAKIACADEMY.COM

3/ la fct $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{x-1}$ est déf sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
en particulier sur $]-\infty, 2] \setminus \{1\}$

la fct $x \mapsto \sqrt{x^2-4}+3$ déf
sur $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$
en particulier sur $]2,+\infty[$

x		-2		2	
x^2-4	+	0	−	0	+

Ainsi $D_g = \left( ]-\infty, 2] \cup]2,+\infty[\right) \setminus \{1\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $g(2) = 3$.

$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{2^-} \frac{x^2-x+1}{x-1} = 3 = g(2)$

g cont à gche en 2

$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x^2-4}+3 = 3 = g(2)$

g cont à drte en 2

g cont à drte et à gche en 2 $\Rightarrow$ g cont en 2

TAKIACADEMY.COM

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - 3}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{x-1}$

$= 0 = g'_d(2)$

Sinon f dérivable en 2

et $f'(2) = 0$ donc $f'_g(2) = 0$

Ainsi g dérivable à gauche en 2

et $f'_g(2) = 0$

Interprétation : $\mathcal{C}_g$ admet au pt A(2, 3) une demi-tangente à gauche horizontale.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

g non dérivable à droite en 2

Interprétation : $\mathcal{C}_g$ admet au pt A(2, 3) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

d) la fct $x \longmapsto \frac{x^2-x+1}{x-1}$ fct rationnelle elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en particulier sur $]-\infty, 2[\setminus \{1\}$

la fct $x \to x^2-4$ dérivable strictement positive sur $]2,+\infty[$ alors la fct $x \to \sqrt{x^2-4}$ dérivable sur $]2,+\infty[$ et donc la fct $x \to \sqrt{x^2-4}+3$ dérivable sur $]2,+\infty[$

g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,2[\setminus\{1\}$ et $]2,+\infty[$

or g non dérivable en 2

<u>Concl</u> g dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2,1\}$

* si $x \in]-\infty,2[\setminus\{1\}$; $g'(x) = f'(x)$

$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

* si $x>2$ $\quad g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Tél : +216 23 39 02 48
Adresse : A22 rue 15 Octobre immeuble yesmine près du Carrefour souk ahad Sousse
E-mail : contact@takiacademy.com
Web : www.takiacademy.com

Academy
TAKIACADEMY.COM

Ainsi $\begin{cases} g'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]-\infty, 2[\setminus \{1\} \\ g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-4}+3\right) - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-4} - x + 3$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{\sqrt{x^2-4}+x} + 3$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} + 3$

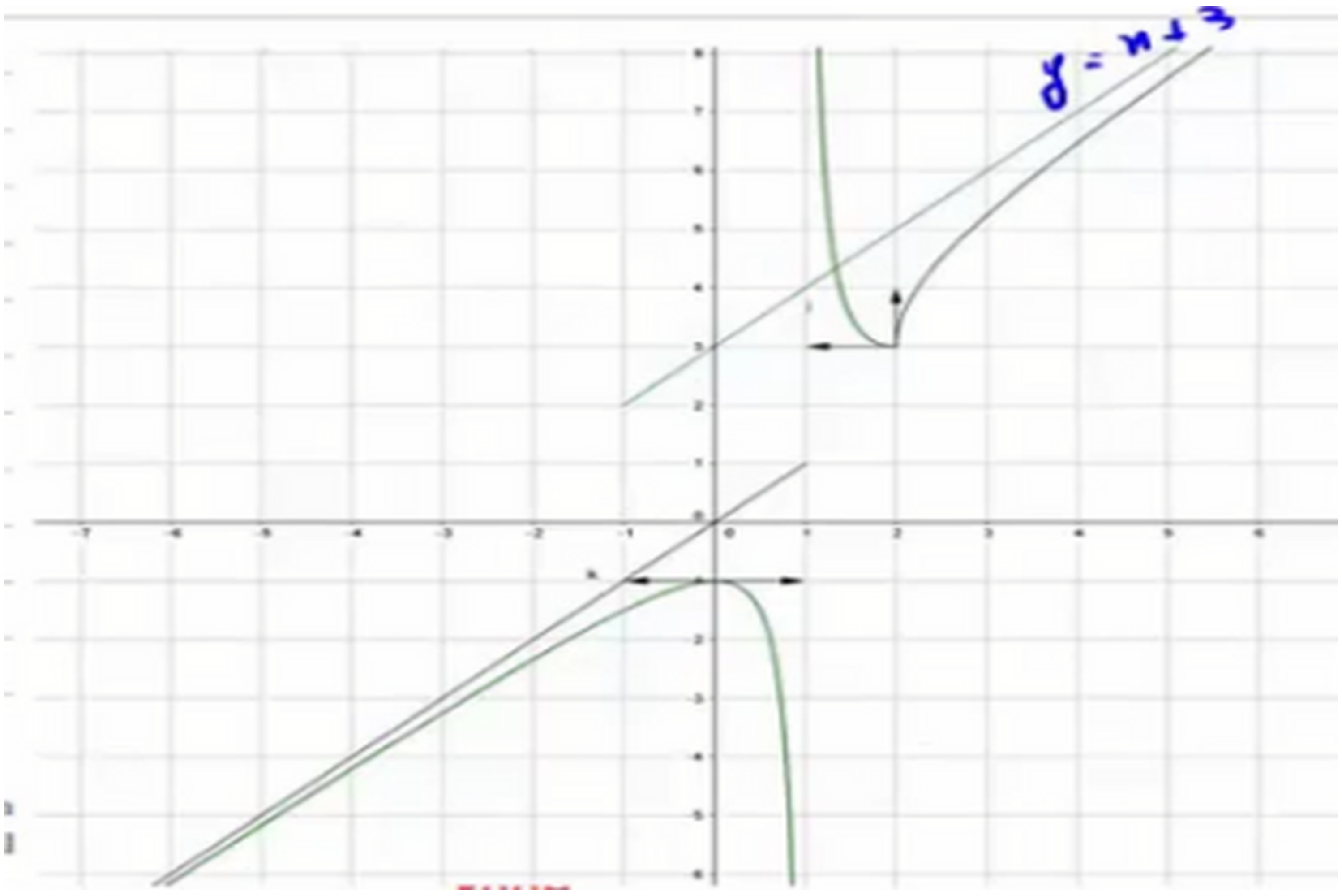
$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} + 3 = 3$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-4}+3\right) - (x+3) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2-4}+3-x}_{3}\right) - 3 = 0$

$\mathcal{D}'$: $y = x + 3$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

$$\begin{cases} g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in \left]-\infty, 2\right[\setminus \{1\} \\ g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	|	$+$	
g	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$